



TITLE:

周期的Exp-格子に対するKac-Moerbekeの解法 (ソリトンの研究)

AUTHOR(S):

戸田, 盛和

CITATION:

戸田, 盛和. 周期的Exp-格子に対するKac-Moerbekeの解法 (ソリトンの研究). 数理解析研究所講究録 1975, 255: 23-32

ISSUE DATE:

1975-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105755>

RIGHT:

周期的 exp-格子に対する Kac-Moerbeke の解法

千葉大 理物理 戸田盛和

§1. exp-格子

exp-格子の運動方程式は

$$\frac{d^2 Q_n}{dt^2} = e^{-(Q_n - Q_{n-1})} - e^{-(Q_{n+1} - Q_n)} \quad (1)$$

あるいは

$$\begin{aligned} \dot{a}_k &= a_k (b_k - b_{k-1}) \\ \dot{b}_k &= 2(a_k^2 - a_{k+1}^2) \end{aligned} \quad (1')$$

ただし

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2} e^{-(Q_k - Q_{k-1})/2} \\ b_k &= -\frac{1}{2} \dot{P}_k \end{aligned} \quad (1'')$$

と書ける。

最近, 周期条件

$$a_{k+n} = a_k, \quad b_{k+n} = b_k \quad (2)$$

のもとに, この運動方程式を解く方法が, Kac と Moerbeke

によつて提出されてゐる。そのあらましを述べたい。叙述の順序や記号などは Kac のとおなじくしても用ゐない。

§2 Floquet の定理の拡張

Hill の常微分方程式に対する Floquet の定理を, exp 格子の定差方程式に拡張する。そのための周期的な係数 a_k , b_k に対する定差方程式

$$a_k y(k) + a_{k+1} y(k+2) + b_k y(k+1) = \lambda y(k+1) \quad (3)$$

$$a_{k+n} = a_k, \quad b_{k+n} = b_k, \quad \lambda = \text{任意}$$

$$-\infty < k < \infty$$

を考へ, $k=0, 1$ における境界条件

$$y^{(1)}(0) = 1, \quad y^{(1)}(1) = 0 \quad (4)$$

をみたす解 $y^{(1)}(k)$ と,

$$y^{(2)}(0) = 0, \quad y^{(2)}(1) = 1 \quad (4')$$

をみたす解 $y^{(2)}(k)$ とを基本解とする。この条件で $k=0$ から逐次解くことにより, 次式が示される。

$$y^{(1)}(n+1) = -\frac{\lambda^{n-1}}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} + O(\lambda^{n-2}) \quad (5)$$

$$y^{(2)}(n+1) = \frac{\lambda^n}{a_1 a_2 \cdots a_n} + O(\lambda^{n-1}) \quad (5')$$

また $Y^{(1)}, Y^{(2)}$ に対する (3) 式を連立させて λ を消去し

$$a_k \{ Y^{(1)}(k) Y^{(2)}(k+1) - Y^{(1)}(k+1) Y^{(2)}(k) \} \\ = a_{k+1} \{ Y^{(1)}(k+1) Y^{(2)}(k+2) - Y^{(1)}(k+2) Y^{(2)}(k+1) \} \quad (6)$$

を得る。これは Wronskian に相当する式である。(4) を用

い、周期が n ($a_n = a_0$) であることを用いれば (6) より

$$Y^{(1)}(n) Y^{(2)}(n+1) - Y^{(1)}(n+1) Y^{(2)}(n) = 1 \quad (7)$$

を得る。

一方、基本解に展開して

$$Y^{(1)}(k+n) = a_{11} Y^{(1)}(k) + a_{12} Y^{(2)}(k) \\ Y^{(2)}(k+n) = a_{21} Y^{(1)}(k) + a_{22} Y^{(2)}(k) \quad (8)$$

と書くと、 $k=0, 1$ とおいて係数は

$$a_{11} = Y^{(1)}(n) \quad a_{12} = Y^{(1)}(n+1) \\ a_{21} = Y^{(2)}(n) \quad a_{22} = Y^{(2)}(n+1) \quad (8')$$

したがって (7) を書き直せば

$$a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 1 \quad (9)$$

さて、擬同期解を

$$Y(k+n) = \alpha Y(k) \quad (10)$$

とする。この解を基本解により

$$Y(k) = c_1 Y^{(1)}(k) + Y^{(2)}(k) \quad (11)$$

と書き、(10) の左辺を (11) と (8) とを用いて書き直せば

$$\det(a_{ij} - \alpha \delta_{ij}) = 0$$

したがって (9) により α は

$$\alpha^2 - \Delta(\lambda)\alpha + 1 = 0 \quad (12)$$

の根であることがわかる。ここにパラメータ λ を陽に書くと

$$\Delta(\lambda) = a_{11} + a_{22} = Y^{(1)}(n, \lambda) + Y^{(2)}(n+1, \lambda) \quad (13)$$

周期解 $\alpha=1$ を与えた固有値 λ_j は (安定解不安定解の境)

$$\Delta(\lambda_j) = 2 \quad (14)$$

で与えられる。(15) と (13) とを用いれば (14) により

$$\Delta(\lambda) = 2 + 2^n \prod_{j=1}^n (\lambda - \lambda_j) \quad (15)$$

と書けることがわかる。ここで $a_1, a_2, \dots, a_n = 1/2^n$ ((13)参照)を用いる。

a_k, b_k が運動方程式 (1) にしたがって時間発展をするとき、固有値 λ_j は時間によらぬ。これはよく知られたことである。

§3. $n-1$ 個の粒子系 M_S

周期 n の場合、粒子数は n で、変位、運動量とあわせて自由度は $2n$ であるが、全系の一般な移動 (回転) は問題外であるから相対変位が $n-1$ 、運動量は n 個あって自由度は $2n-1$ 個である。固有値 λ_j は n 個あり、運動の定数である。したがって、何れ $n-1$ 個のものに時間関数と1とを与えれば問題は解けることになる。ここに λ_j は

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} b_n & a_1 & & 0 & a_n \\ a_1 & b_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ a_n & & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{pmatrix} \quad (16)$$

の固有値であることを示した。そこで、1行1列の小行列

$$\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} b_1 & a_2 & & 0 \\ a_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{pmatrix} \quad (17)$$

の固有値を μ_s ($s=1, 2, \dots, n-1$) (17')

とする。 μ_s は固有値の関数である。 \mathcal{L}' の固有値は

$$\phi(k, \mu_s) = -\frac{a_1}{a_n} \gamma''(k+1, \mu_s) \quad (18)$$

$$(k=1, 2, \dots, n-1)$$

であること示した。 したがって、因子 $-a_1/a_n$ は $\phi(1, \mu_s)=1$

になるようにとった。 また、 μ_s は境界条件

$$\phi(0, \mu_s) = \phi(n, \mu_s) = 0$$

あるいは $\gamma''(1, \mu_s) = \gamma''(n+1, \mu_s) = 0$ (19)

を方程式 (3) に付けるときの固有値である。

(19) と (7) と (13) とから

$$\Delta(\mu_s) = \gamma''(n, \mu_s) + \frac{1}{\gamma''(n, \mu_s)} \quad (20)$$

$$|\Delta(\mu_s)| \geq 2 \quad (21)$$

であり、 μ_s は (3) の解の不安定領域にある。

また (21) から $\gamma''(n, \mu_s) = \frac{\Delta(\mu_s) \pm \sqrt{\Delta^2(\mu_s) - 4}}{2}$ (22)
 (複素数の選び方不明)

さて,

$$\dot{\gamma}(k) = \frac{d}{d\lambda} \gamma(k, \lambda) \quad (23)$$

と書く

$$a_k \gamma''(k) + a_{k+1} \gamma''(k+2) = (\lambda - b_k) \gamma''(k+1)$$

$$a_k \dot{\gamma}''(k) + a_{k+1} \dot{\gamma}''(k+2) = \gamma''(k+1) + (\lambda - b_k) \dot{\gamma}''(k+1)$$

これを用いて

$$\begin{aligned} [\gamma''(k+1)]^2 &= a_k \{ \dot{\gamma}''(k) \gamma''(k+1) - \gamma''(k) \dot{\gamma}''(k+1) \} \\ &\quad - a_{k+1} \{ \dot{\gamma}''(k+1) \gamma''(k+2) - \gamma''(k+1) \dot{\gamma}''(k+2) \} \end{aligned}$$

これを加えて (19) を用いると

$$\sum_{k=1}^{n-1} [\gamma''(k+1, \mu_s)]^2 = a_n \gamma''(n, \mu_s) \dot{\gamma}''(n+1, \mu_s) \quad (24)$$

一方 (5) を使えば

$$\gamma''(n+1, \lambda) = - \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} \prod_{s=1}^{n-1} (\lambda - \mu_s) \quad (25)$$

したがって

$$P(\lambda) = \prod_{s=1}^{n-1} (\lambda - \mu_s) \quad (26)$$

$$P'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} P(\lambda) \quad (26')$$

とある

$$\sum_{k=1}^{n-1} [Y''(k+1, \mu_s)]^2 = - \frac{a_n}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} P'(\mu_s) \frac{\Delta(\mu_s) \pm \sqrt{\Delta^2(\mu_s) - 4}}{2}$$

これを再び (18) を規格化したとき、 $a_1 a_2 \dots a_n = 1/2^n$ となるから

$$l^2(\mu_s) = -2^n a_1^2 P'(\mu_s) \frac{\Delta(\mu_s) \pm \sqrt{\Delta^2(\mu_s) - 4}}{2} \quad (27)$$

と表わす

$$\psi_s(k) = \frac{\phi(k, \mu_s)}{l(\mu_s)} \quad (28)$$

は規格直交系を作す。すなわち

$$\sum_{k=1}^{n-1} \psi_s(k) \psi_{s'}(k) = \delta_{s,s'} \quad (29)$$

$$\sum_{s=1}^{n-1} \psi_s(k) \psi_s(k') = \delta_{k,k'} \quad (29')$$

$$k=k'=1 \text{ とおくと } \sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{l^2(\mu_s)} = 1 \quad (30)$$

よって (27) により

$$a_1^2 = -2^{n-1} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\delta(\mu_s)}{P'(\mu_s)} \quad (31)$$

ここに

$$\delta(\mu_s) = \frac{1}{\Delta(\mu_s) \pm \sqrt{\Delta^2(\mu_s) - 4}} = \frac{\Delta(\mu_s) \mp \sqrt{\Delta^2(\mu_s) - 4}}{2} \quad (32)$$

μ_s の範囲を動かして、(31) は a_1^2 を与える。他

9 a_k は (17) の固有値の数: ψ であるから

$$a_k = \sum_{s=1}^{n-1} \mu_s \psi_s(k-1) \psi_s(k) \quad (k=2, \dots, n-1) \quad (33)$$

で与えられる。 a_n は $a_1, a_2, \dots, a_n = 1/2^n$ に与えられる。

同様にして

$$b_k = \sum_{s=1}^{n-1} \mu_s \psi_s^2(k) \quad (k=1, 2, \dots, n-1) \quad (34)$$

$$b_n \text{ は trace の値} \quad \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{j=1}^n \lambda_j \quad (35)$$

を用いて与えられる。

§4. μ_s の時間変化

\mathcal{L}' をさらに 1 行 1 列縮めたマトリクス

$$\mathcal{L}'' = \begin{pmatrix} b_1 a_2 & & & \\ a_2 b_2 & & & 0 \\ & \ddots & & a_{n-2} \\ 0 & a_{n-2} b_{n-2} & & \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}'' = \begin{pmatrix} b_2 a_3 & & & \\ a_3 b_3 & & & \\ & \ddots & & a_{n-1} \\ & & a_{n-1} b_{n-1} & \end{pmatrix} \quad (37)$$

を用いると

$$\frac{d}{dt} \det(\mathcal{L}' - \lambda 1) = 2 \{ a_n^2 \det(\mathcal{L}'' - \lambda 1) - a_1^2 \det(\tilde{\mathcal{L}}'' - \lambda 1) \} \quad (38)$$

および

$$a_1^2 a_n^2 \det(\mathcal{L}'' - \mu_s 1) \det(\tilde{\mathcal{L}}'' - \mu_s 1) = 1/2^{2n} \quad (39)$$

を示すことができる (証明略)。 $n=3, 4$ のときは容易に確かめられる。

$$\text{すなわち} \quad \Delta^2(\mu_s) - 4 = 2^{2n} \{a_1^2 \det(\mathcal{L}'' - \mu_s 1) - a_n^2 \det(\tilde{\mathcal{L}}'' - \mu_s 1)\}^2 \quad (40)$$

を、以下に用いる。 (38) を用いると

$$\Delta^2(\mu_s) - 4 = 2^{2n-2} \left(\frac{d}{dt} \det(\mathcal{L}' - \lambda 1) \right)^2 \Big|_{\lambda=\mu_s} \quad (41)$$

一方 \mathcal{L}' の固有値 μ_s には $\lambda = \mu_s$ を用いる (26) 参照

$$\det(\mathcal{L}' - \lambda 1) = (-1)^{n-1} P(\lambda) \quad (42)$$

(28) より

$$\frac{d}{dt} \det(\mathcal{L}' - \lambda 1) \Big|_{\lambda=\mu_s} = (-1)^{n-1} P'(\mu_s) \frac{d\mu_s}{dt} \quad (43)$$

$$\text{故に} \quad \left(P'(\mu_s) \frac{d\mu_s}{dt} \right)^2 = 2^{-2n+2} (\Delta^2(\mu_s) - 4) \quad (44)$$

† (44) の左辺を整理する

$$\sum_{s=1}^{n-1} \frac{\mu_s^r}{P'(\mu_s)} = 0 \quad (r=0, 1, 2, \dots, n-3)$$

$$\sum_{s=1}^{n-1} \frac{\mu_s^{n-2}}{P'(\mu_s)} = 1 \quad (45)$$

を用いると $d\mu_s/dt$ と μ_s の関係は Abel の積分形式で

$$\sum_{s=1}^{n-1} \mu_s^r \frac{d\mu_s/dt}{\pm \sqrt{\Delta^2(\mu_s) - 4}} = 0$$

$$\sum_{s=1}^{n-1} \mu_s^{n-2} \frac{d\mu_s/dt}{\pm \sqrt{\Delta^2(\mu_s) - 4}} = 2^{-n+1} \quad (46)$$

(± 記号は $(d\mu_s/dt)/\pm \sqrt{\Delta^2(\mu_s) - 4}$ が $P'(\mu_s)$ と同符号に存在するから)

と書いた。この積分を μ_s についての解 (9 は Jacobi の逆問題と (2) 知す) である。これは解 4 である問題であるから、周期条件のもとでの exp-格子の一般解 (初期値問題) は解 4 であることになる。

文献

M. Kac and P. van Moerbeke

On an explicitly soluble system of non-linear differential equations related to certain Toda lattices

Advances in Math. 16 (1975) 160

On some periodic Toda lattices

Proc. Natl. Ac. Sci. U.S.A. 72 (1975) 1627

A solution of the periodic Toda problem

(preprint.)

M. Kac: The three body Toda problem (private communication to J. Ford)

H. Flaschka and D.W. McLaughlin: Canonically Conjugate

Variables for the Korteweg-de Vries Equation and the Toda

Lattice with Periodic Boundary Conditions (preprint) = 41: 1

Kac の方法をやや別の角度から述べている。ソ聯における数学的仕事文献もある。